

Analyse modale d'un processus de diffusion thermique : identification par thermographie infra-rouge

R. PASQUETTI et D. PETIT

Laboratoire Systèmes Energétiques et Transferts Thermiques, S.E.T.T. (Unité Associée C.N.R.S. 1168), Université de Provence, Faculté de St Jérôme, 13397 Marseille Cedex 13, France

(Reçu le 6 Novembre 1986 et sous forme finale le 27 Mars 1987)

Résumé—On rappelle l'intérêt que peut présenter la représentation d'état, quand elle est formulée dans la base modale, pour les systèmes thermiques linéaires à paramètres répartis. On propose une procédure d'identification d'une telle représentation, d'après l'analyse de la réponse du système lors de sa transition d'un état thermiquement excité à un état stationnaire et les résultats de différents essais en régime statique. Le démarche théorique est appliquée à un processus de diffusion thermique pour lequel on mesure, par thermographie infra-rouge, le champ de température superficielle. Le modèle identifié, d'ordre très réduit, a permis, lors d'une expérimentation en régime dynamique, de reconstituer l'évolution de ce champ de température.

1. INTRODUCTION

LA REPRÉSENTATION interne des systèmes dynamiques, basée sur la notion d'espace état, est bien adaptée à la description de systèmes linéaires invariants, qu'ils soient d'ordre infini (régis par une équation aux dérivées partielles) ou d'ordre fini [1]. La propriété d'invariance permet une forme canonique de cette représentation qui met en évidence les modes propres du système. Partant de données expérimentales obtenues par thermographie IR, nous proposons l'identification d'une telle forme canonique pour un processus de diffusion thermique, par l'estimation, en particulier, de ses "modes dominants". L'objectif est l'élaboration d'un modèle de petite dimension susceptible de décrire avec une bonne précision l'évolution du processus, en particulier de son champ de température superficielle, connaissant les variations des grandeurs d'entrée. Il est présenté successivement :

- (a) des rappels concernant l'analyse modale des systèmes,
- (b) le processus de diffusion étudié et le dispositif expérimental,
- (c) la procédure d'identification des modes dominants et son application au système étudié,
- (d) la procédure d'identification des autres paramètres et une confrontation du modèle complet à l'expérience,
- (e) l'affinement éventuel de ce modèle et sa validation.

Le travail décrit dans cet article doit être intégré aux recherches, menées par les automaticiens (par exemple [2]) et par les thermiciens (par exemple [3, 6], relatives à l'identification de représentations minimales de systèmes linéaires complexes.

2. ANALYSE THÉORIQUE

2.1. *Représentation d'état d'un système linéaire, invariant, à paramètres localisés*

Un tel système est de dimension finie ; il est alors classique d'utiliser la représentation d'état :

$$\dot{T}(t) = AT(t) + BU(t) \quad (1)$$

$$Y(t) = CT(t) \quad (2)$$

t , le temps ; $T(t)$ et $\dot{T}(t)$, le vecteur d'état et sa dérivée temporelle (dimension n) ; $U(t)$, le vecteur d'entrée ou de commande au système (dim. p) ; $Y(t)$, le vecteur de sortie (dim. q) ; A , B , C , respectivement les matrices d'évolution (dim. n, n), d'entrée (dim. n, p) et de sortie (dim. q, n).

2.2. *Représentation d'état d'un système linéaire, invariant, à paramètres répartis. Application à la diffusion thermique*

Pour un système à paramètres répartis, l'état est fonction de l'espace et du temps : $T(M, t)$. Il est alors régi par une équation aux dérivées partielles associée à des conditions aux limites. Dans le cas de la diffusion thermique linéaire, l'équation d'état est l'équation de la chaleur, formulée à diffusivité thermique constante et associée à des conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann ou Fourier.

Le champ de température, solution de cette équation d'état, est évidemment de dimension infinie. Le vecteur de sortie Y peut être de dimension finie : ses composantes correspondent alors à des températures ou des flux en des points déterminés. En discrétisant spatialement le domaine de résolution, on retrouve une équation du type (1). Les valeurs propres de la matrice A sont alors toutes réelles et négatives. Les conditions aux limites se retrouvent dans les composantes du vecteur d'entrée.

NOMENCLATURE

A	matrice d'évolution	(vecteur ou matrice) 1 ou 2	partitionnement en 2 de vecteur ou de matrice
B	matrice d'entrée	(matrice) 11, 12, 21 ou 22	partitionnement en 4 de matrice.
C	matrice de sortie		
G	matrice d'entrée dans la base modale		
H	matrice de sortie dans la base modale		
J	matrice diagonale des valeurs propres de A		
L	matrice définie par $\mathbf{G} = -\mathbf{JL}$		
M	matrice des vecteurs propres de A		
<i>n</i>	dimension du vecteur d'état		
<i>n</i> ₁ , <i>n</i> ₂	dimension de <i>X</i> ₁ et <i>X</i> ₂		
<i>p</i>	dimension du vecteur d'entrée		
<i>q</i>	dimension du vecteur de sortie		
R	matrice carrée régulière		
<i>s</i>	nombre de régimes statiques		
<i>t</i>	temps		
<i>T</i>	vecteur des températures		
<i>U</i>	vecteur des entrées		
<i>X</i>	vecteur d'état dans la base modale		
<i>X</i> ₀	vecteur d'état initial		
X _d	matrice diagonale des états initiaux		
<i>Y</i>	vecteur des sorties		
		Symboles grecs	
		λ_i	<i>i</i> ème valeur propre
		σ_i	écart-type
		τ_i	<i>i</i> ème constante de temps.
		Indices supérieurs	
		.	dérivation par rapport au temps
		T	transposition
		~	associé au régime de référence
		<i>k</i>	associé au <i>k</i> ème régime statique.
		Indices inférieurs	
		<i>i, j</i>	<i>i</i> (<i>j</i>) ème composante de vecteur
		<i>ij</i>	élément <i>i</i> ème ligne et <i>j</i> ème colonne de matrice
		<i>i, j.</i>	<i>i</i> (<i>j</i>) ème ligne de matrice
		. <i>i, j</i>	<i>i</i> (<i>j</i>) ème colonne de matrice.

2.3. La représentation d'état dans la base modale

Lorsque, comme dans le cas de la diffusion thermique, la matrice d'évolution est diagonalisable, le vecteur d'état peut s'exprimer dans la base des vecteurs propres (base modale). En notant :

J la matrice diagonale des valeurs propres de **A**

M la matrice modale constituée par les vecteurs propres, les équations (1) et (2) deviennent :

$$\dot{X}(t) = \mathbf{JX}(t) + \mathbf{GU}(t) \quad (3)$$

$$Y(t) = \mathbf{HX}(t) \quad (4)$$

avec

$$T(t) = \mathbf{MX}(t), \quad \mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM},$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{CM}.$$

La représentation (3) et (4), qui présente l'intérêt de découpler les équations d'état (d'où une résolution plus facile), est une forme canonique qui permet d'envisager l'identification des matrices **J**, **G** et **H**. Partant de données expérimentales, seuls les modes dominants du système peuvent être mis en évidence et l'ordre du modèle identifié est donc naturellement réduit. La forme canonique résultante constitue alors la structure d'un "modèle modal" [5, 6]. Rappelons ici que les termes de la matrice **J**, soit les valeurs propres de **A**, sont les pôles de la matrice de transfert du système dans une description (externe) de type entrées-sorties [1].

Les hypothèses de linéarité et d'invariance sont toutefois contraignantes. Elles seront en général

satisfaites de manière acceptable si le modèle est formulé au voisinage du régime nominal du système étudié. Un régime de référence étant choisi, on supposera donc dans tout ce qui suit avoir en (3) et (4) :

U(*t*) écart de l'entrée à l'entrée de référence

Y(*t*) écart de la sortie à la sortie de référence.

Pour le régime de référence, *U*(*t*) et *Y*(*t*) sont alors nuls, ainsi que l'état *X*.

3. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

3.1. Le système étudié

Il s'agit d'une plaque en acier inoxydable (conductivité thermique, masse volumique et capacité thermique massique de l'ordre de 15 W m⁻¹ K⁻¹, 7700 kg m⁻³ et 500 J kg⁻¹ K⁻¹) de dimensions 405 × 127 × 2 mm. Sa face supérieure est revêtue d'une couche de peinture assimilable à un corps gris isotrope d'émissivité 0.95 ; sur l'autre face est collée une résistance électrique chauffante, dissipant une puissance réglable par variation de différence de potentiel (d.d.p.) 0-240 V. Cette plaque est posée horizontalement sur quatre supports quasiponctuels pour éviter les pertes par conduction.

3.2. La chaîne d'acquisition de données

La détection du champ de flux surfacique se fait par thermographie infra-rouge [7] : la face supérieure est

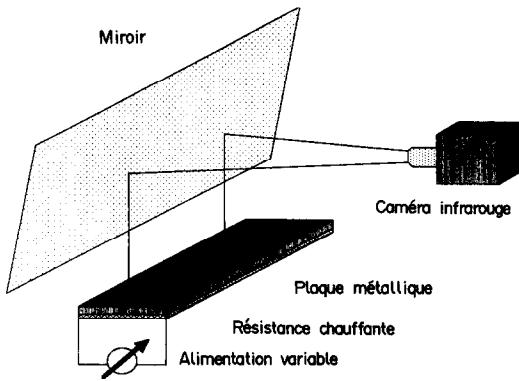


FIG. 1. Schéma de principe du dispositif expérimental.

filmée par l'intermédiaire d'un miroir incliné à 45° (Fig. 1).

La chaîne d'acquisition de données est constituée :

- (a) d'une caméra infra-rouge (AGA 780) et de son moniteur,
- (b) d'un convertisseur analogique-numérique,
- (c) d'un mini-ordinateur (HP 1000F) interfacé au convertisseur.

Ses principales caractéristiques sont :

- (a) définition : 64 * 128 pixels ("picture element"),
- (b) digitalisation : 256 niveaux (8 bits),
- (c) fréquence maximale d'acquisition : 25/4 images s⁻¹.

Le nombre d'images habituellement enregistrées est de 200. A partir des flux surfaciques mesurés, connaissant l'émissivité de la surface, on détermine les températures. A chaque "pixel" est donc associé un thermogramme temporel constitué de 200 températures, suivant un pas de temps, multiple de la période minimale d'acquisition, ajustable par l'utilisateur.

4. IDENTIFICATION DE LA DIMENSION DU MODÈLE ET DES MODES DOMINANTS

On se propose d'identifier ces paramètres d'après une expérimentation où le système évolue d'un état thermiquement excité à un état stationnaire.

4.1. Analyse théorique

Considérons une entrée \tilde{U} constante, l'état \tilde{X} et la sortie \tilde{Y} correspondants en régime stationnaire ; en notant X_0 l'état initial, l'équation (3) s'intègre sous la forme :

$$X = \exp(\mathbf{J}t)(X_0 - \tilde{X}) + \tilde{X}. \quad (5)$$

En reportant dans (4) :

$$Y = H \exp(\mathbf{J}t)(X_0 - \tilde{X}) + \tilde{Y}. \quad (6)$$

Rangeons les n composantes du vecteur $(X_0 - \tilde{X})$ sur la diagonale d'une matrice carrée (n, n) , notée \mathbf{X}_d ; avec $\mathbf{1}$ le vecteur de dimension n et de composantes unitaires :

$$Y = H \exp(\mathbf{J}t) \mathbf{X}_d \mathbf{1} + \tilde{Y}. \quad (7)$$

Le produit de matrices diagonales étant commutatif, l'équation (7) s'écrit :

$$Y = \mathbf{K} \exp(\mathbf{J}t) \mathbf{1} + \tilde{Y} \quad (8)$$

avec

$$\mathbf{K} = H \mathbf{X}_d. \quad (9)$$

Le retour au régime statique du système initialement porté à un état X_0 et soumis à une entrée constante doit donc permettre, d'après les thermogrammes qui constituent la sortie du système, d'estimer la dimension n , les modes dominants correspondants contenus dans \mathbf{J} , la matrice \mathbf{K} et le vecteur \tilde{Y} . Cette identification se fait par minimisation d'un critère quadratique. Le traitement numérique de ce problème a fait l'objet d'une étude approfondie évoquée en Annexe. Remarquons que l'expérimentation proposée ne saurait permettre l'identification de \mathbf{H} et \mathbf{X}_d . A ce niveau du développement, les éléments de \mathbf{K} s'apparentent donc à des variables adjointes dont les estimations conditionnent celles des valeurs propres.

4.2. Expérimentations et résultats

4.2.1. *Méthode expérimentale.* Nous enregistrons l'évolution du champ de flux surfacique de la plaque entre un état initial X_0 et un état final \tilde{X} . X_0 est obtenu par chauffage à la d.d.p. V ; des isolants, posés sur la face supérieure, assurent un gradient de température tridimensionnel. A l'instant initial, on diminue la d.d.p. de V à V' tout en enlevant les isolants. On obtient une cartographie thermique initiale du type représenté sur la Fig. 2. L'état final \tilde{X} correspond au régime statique associé à la d.d.p. V' et à la température ambiante, quasiment constante pendant l'expérimentation d'environ 30 min. Cette durée correspond expérimentalement au temps de retour à l'équilibre thermique de la plaque ; elle apparaît ci-dessous environ égale à cinq fois la constante de temps principale du système.

4.2.2. *Résultats et commentaires.* Nous avons réalisé plusieurs expérimentations, dites de "relaxation", avec plusieurs niveaux de chauffe et des positions différentes des isolants. Nous avons habituellement travaillé sur 50 thermogrammes, soit 10 000 températures. Pour chacune des identifications, l'ordre du modèle est arrêté lorsque l'adjonction d'une valeur propre ne permet pas de réduire l'écart-type moyen de façon assez sensible. Cette limitation est évidemment fonction du bruit de mesure qui peut atteindre ± 1 degré pour les plus faibles niveaux thermiques. Dans le cas d'un essai les écarts-types moyens obtenus sont donnés Tableau 1.

Deux modes propres apparaissent ici suffisants et ce résultat a été retrouvé sur l'ensemble des expérimentations. τ_1 et τ_2 étant les constantes de temps correspondantes (inverse positif des valeurs propres), les résultats obtenus sont présentés Tableau 2.

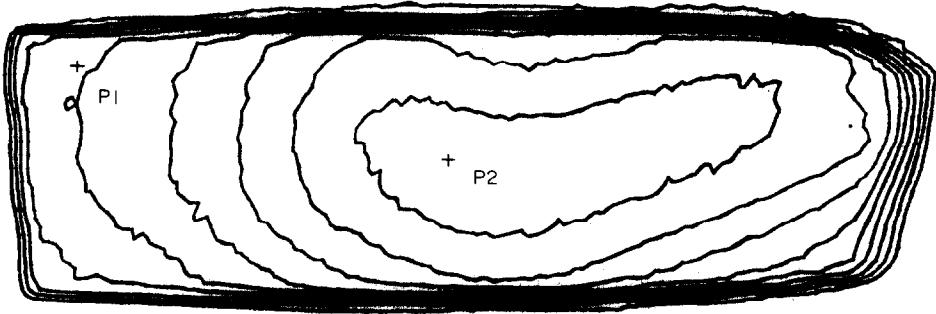


FIG. 2. Cartographie thermique initiale: isothermes de 35°C (bords de la plaque) à 75°C, par pas de 5°C. Emplacement des points P1 et P2.

Tableau 1

Nombre de valeurs propres	1	2	3	4	5
Ecart-type moyen (°C)	0.401	0.376	0.371	0.366	0.363

Tableau 2

Expérimentation	1	2	3	4	5
τ_1 (s)	367	324	357	331	330
τ_2 (s)	115	95	129	186	147
Ecart-type moyen (°C)	0.41	0.35	0.53	0.79	0.38

En ce qui concerne les différentes manipulations, on constate une dispersion de 10% sur τ_1 et de 100% sur τ_2 . Ceci peut, a priori, être attribué quatre phénomènes:

- (a) les non-linéarités du processus (les niveaux thermiques sont différents),
- (b) les bruits de mesure (cf. Annexe),
- (c) la faible contribution à la sortie du système de la seconde constante de temps: les écarts-types correspondant à 1 et 2 constantes de temps sont voisins (Tableau 1),
- (d) un "effet de localisation" des constantes de temps d'ordre élevé: sur une même expérimentation on a toutefois vérifié que la sensibilité à l'emplacement des 50 points de mesure était faible (moins de 1% sur τ_1 à quelques % sur τ_2).

Sur la Fig. 3 sont présentés 2 thermogrammes (manipulation 5), extraits des 50 que nous avons traités, correspondant à l'évolution de température des points P1 et P2 repérés sur la Fig. 2. Les courbes identifiées y figurent également avec leur expression analytique. Les écarts-types correspondant à P1 et P2 sont respectivement 0.34 et 0.42°C, les écarts-types minimal et maximal sur l'ensemble des 50 points sont 0.31 et 0.42°C.

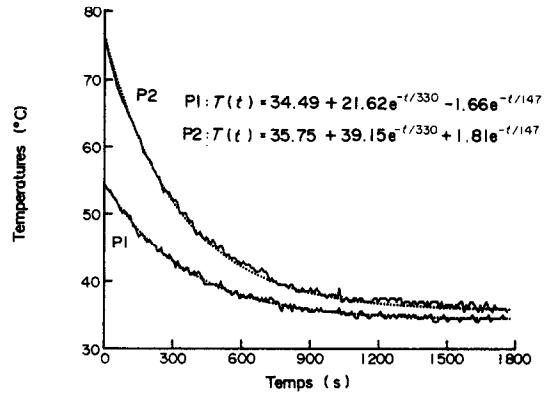


FIG. 3. Relaxation. Thermogrammes expérimentaux (traits continus) et identifiés (pointillés).

5. IDENTIFICATION DES MATRICES D'ENTRÉE ET DE SORTIE

La matrice d'évolution du système modal ayant été identifiée, il s'agit maintenant de déterminer les matrices d'entrée et de sortie à de modèle.

5.1. Analyse théorique

5.1.1. Identification de la matrice de sortie H. L'estimation des modes dominants de la matrice J a nécessité celle des termes d'une matrice K liée à la matrice de sortie H par la relation (9). Reprenons ci-dessous cette relation ainsi que celles du modèle modal (3) et (4):

$$\dot{X} = JX + GU \tag{10}$$

$$Y = HX \tag{11}$$

$$K = HX_d \tag{12}$$

Bien que la matrice diagonal X_d soit inconnue, envisageons le changement de base:

$$X = X_d X' \tag{13}$$

alors

$$\dot{X}' = JX' + G'U \text{ avec: } G' = X_d^{-1}G \tag{14}$$

$$Y = KX' \tag{15}$$

Cette nouvelle représentation est analogue à (10) et (11), puisque le vecteur d'état d'un système est défini à une matrice de changement de repère près. La matrice G n'étant pas encore déterminée, on peut donc prendre, pour la matrice de sortie H , la matrice K , précédemment identifiée, et garder la représentation (10) et (11).

5.1.2. *Identification de la matrice d'entrée G.* On se propose d'identifier la matrice G d'après les résultats d'essais effectués en régimes stationnaires. En régime stationnaire on a simplement :

$$JX + GU = 0 \tag{16}$$

soit

$$X = LU \tag{17}$$

et

$$Y = HX = HLU \tag{18}$$

avec

$$G = -JL. \tag{19}$$

En notant L_i la i ème colonne de la matrice L (dim. n,p), l'égalité (18) peut encore s'écrire :

$$Y = [U_1H, U_2H, \dots, U_pH] \begin{bmatrix} L_{.1} \\ \vdots \\ L_{.p} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

La relation (20) ne peut toutefois permettre la détermination de la matrice L , car la matrice $[U_1H, \dots, U_pH]$ (dim. q, np) a pour rang celui de la matrice H , normalement égal à n . Pour déterminer L , la considération simultanée d'au moins p régimes statiques linéairement indépendants est donc nécessaire. Sous s régimes statiques ($s \geq p$), notés ci-dessous avec l'indice supérieur, le calcul, au sens des moindres carrés [8] de la matrice L , conduit à résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \dots \sum_{k=1}^s U_i^k U_j^k H^T H \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{.1} \\ \vdots \\ L_{.p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{k=1}^s U_i^k H^T Y^k \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Connaissant L on calcule G d'après (19).

5.2. *Expérimentations et résultats*

Pour le système étudié le vecteur d'entrée présente a priori 2 composantes :

- (a) le flux appliqué à l'arrière de la plaque,
- (b) la température ambiante.

Pratiquement, les variations de la température ambiante étant négligeables en cours d'expérimentation, nous n'avons retenu que le flux : celui-ci est proportionnel au carré de la tension d'alimentation de la résistance chauffante.

Pour identifier les matrices d'entrée et de sortie,

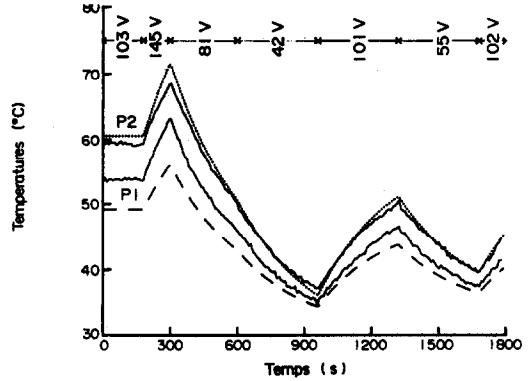


FIG. 4. Thermogrammes expérimentaux (traits continus) et théoriques (P1: tirets, P2: pointillés) avec variations de l'entrée.

trois régimes statiques ont été effectués à $V = 41, 81$ et 103 V. Le régime statique de référence est celui correspondant à la fin de l'expérimentation de relaxation pour laquelle V était de 61 V.

Nous avons caractérisé les résultats obtenus par les écarts minimal et maximal des températures expérimentale et théorique, ainsi que par l'écart-type déterminé sur l'ensemble des points. Ces résultats figurent dans le Tableau 3 de même que les écarts de température aux points P1 et P2 définis Fig. 2.

Ci-dessous sont présentées les équations d'état identifiées ainsi que les équations de sortie associées aux 2 points P1 et P2 retenus parmi les 50 points traités

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1/330 & 0 \\ 0 & -1/147 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2.86E-07 \\ -3.53E-07 \end{bmatrix} U \text{ avec } \tilde{U} = 61^2 \tag{22}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 21.62 & -1.658 \\ 39.15 & 1.811 \end{bmatrix} X \text{ avec } \tilde{Y} = \begin{bmatrix} 34.5 \\ 35.8 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

5.3. *Confrontation du modèle à l'expérience*

Pour tester le modèle élaboré nous avons appliqué, à partir d'un régime stationnaire, une entrée correspondant à une succession d'échelons de la tension d'alimentation de la résistance chauffante. Les évolutions de température de l'ensemble des points ont été calculées par intégration numérique des équations d'état (22) et (23). Pour quantifier l'écart entre les thermogrammes expérimentaux et théoriques, nous avons calculé les écarts-types correspondants. L'écart global (sur l'ensemble des mesures) est de 2.08°C , le minimal est de 0.39°C et le maximal de 4.69°C .

Sur la Fig. 4 sont représentés la variation de la tension V , ainsi que les thermogrammes expérimentaux et calculés des points P1 et P2. Les écarts-type correspondant à ces 2 points sont respectivement 3.19 et 1.03°C . On constate que la dynamique du processus est très bien reproduite mais un écart par

rapport au régime statique initial semble se propager sur l'ensemble de l'expérience. Ci-dessous nous proposons une méthode d'affinement du modèle en vue d'une meilleure concordance pour les régimes stationnaires.

6. AFFINEMENT DU MODÈLE

L'expérimentation de relaxation n'a mis en évidence que les modes ayant une incidence sensible sur le régime dynamique ; pour affiner le modèle élaboré, en ayant de meilleures concordances pour les régimes permanents, on se propose d'adjoindre aux modes dominants identifiés des modes induisant des "champs statiques résiduels" correcteurs des régimes permanents calculés.

6.1. Analyse théorique

On partitionne le vecteur d'état en 2 vecteurs X_1 et X_2 correspondant respectivement aux n_1 modes identifiés et aux n_2 modes adjoints. Il en résulte le partitionnement suivant des diverses matrices :

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad H = [H_1 \quad H_2]. \quad (24)$$

L'expérimentation de relaxation permet l'identification des matrices J_1 et H_1 ; par des expérimentations en régime stationnaire il s'agit donc d'identifier les matrices G et H_2 , soit, L et H_2 . On s'intéressera ensuite à la définition de la matrice J_2 .

6.1.1. *Identification des matrices L et H₂*. Avec les notations du paragraphe 5.1.2 :

$$X = LU \quad (25)$$

$$Y = H_1 X_1 + H_2 X_2. \quad (26)$$

La détermination simultanée de L et H_2 , au sens des moindres carrés, est envisageable par une procédure itérative sur les résolutions de deux problèmes relevant de la programmation quadratique : les déterminations de L connaissant H_2 et de H_2 connaissant L . Supposons ainsi connue la matrice L et donc, les états correspondant à s régimes statiques ; en notant H_{1i} , (H_{2i}), la i ème ligne de H_1 (H_2), l'équation (26), formulée pour la composante i de Y , peut s'écrire :

$$X_2^T H_{2i}^T = Y_i - H_{1i} X_1. \quad (27)$$

Pour s régimes statiques ($s \geq n_2$), la résolution, au sens des moindres carrés, s'obtient d'après :

$$H_{2i}^T = \left(\sum_{k=1}^s X_2^k X_2^{kT} \right)^{-1} \times \left(\sum_{k=1}^s X_2^k (Y_i^k - H_{1i} X_1^k) \right). \quad (28)$$

Connaissant L il est donc possible de calculer suc-

cessivement les lignes de la matrice H_2 . La matrice H étant déterminée la démarche proposée en 5.1.2 permet de calculer la matrice L . On doit toutefois remarquer ici que :

(a) la procédure de détermination de H_2 interdit l'adjonction de plus de p modes ($n_2 \leq p$) ; en (28) l'inversion de la matrice suppose son rang égal à n_2 , or :

$$\text{rang} \left(\sum_{k=1}^s X_2^k X_2^{kT} \right) = \text{rang} \left[L_2 \left(\sum_{k=1}^s U^k U^{kT} \right) L_2^T \right] \leq P \quad (29)$$

(b) les matrices L_2 et H_2 ne sont définies qu'à une matrice régulière R près, puisque $H_2 R^{-1}$ et $R L_2$ sont également solutions ; pour éviter une divergence numérique on doit donc imposer une sous matrice de L_2 , en supposant par exemple que (I matrice unité) :

$$L_2 = [L_{21} \quad L_{22}] = [I \quad L_{22}]. \quad (30)$$

6.1.2. *Choix de la matrice J₂*. Sous l'hypothèse que la matrice J_1 soit bien représentative de la dynamique du système étudié, trois types de choix sont encore possibles pour la matrice diagonale J_2 :

(a) J_2 infini : il s'agit d'adjoindre au vecteur d'état des composantes ayant une incidence sensible sur les régimes statiques mais correspondant à des modes trop rapides pour pouvoir être identifiés par l'expérimentation de relaxation ; dans ce cas :

$$X_2 = L_2 U. \quad (31)$$

L'inconvénient de cette correction instantanée est que des discontinuités dans les variations du vecteur de sortie Y sont prévisibles lors de variations brutales du vecteur d'entrée U .

(b) J_2 proche de 0 : l'adjonction de modes lents, relativement aux modes dominants, peut être intéressante pour les systèmes fonctionnant le plus souvent en régime statique ; lors d'un transitoire entre deux de ces régimes statiques l'état est ajusté en fin de transitoire suivant des constantes de temps très supérieures à celles du système.

(c) J_2 partie de J_1 ($n_2 \leq n_1$) : la correction est assurée avec une dynamique qui est celle du système. De plus, si le nombre de modes adjoints est maximal, soit si $n_2 = p$, le choix pour J_2 d'une matrice extraite de J_1 revient à se satisfaire du modèle de dimension n_1 mais après avoir affiné une sous matrice H_1' (dim. q, n_2) de H_1 (dim. q, n_1) ; la matrice L_2 (dim. p, p) peut alors en effet être choisie quelconque et en particulier égale à une sous-matrice L_1' de L_1 , d'où des équations d'état en fait préexistantes. Cette solution présente l'avantage de ne pas augmenter la dimension du modèle. Après permutation éventuelle des composantes du vecteur d'état on peut supposer J_2 égal J_1 tronqué de ses derniers termes ; dans ce cas, en

Tableau 3

d.d.p. (V)	σ (°C)	ΔT_{max}	ΔT_{min}	ΔT_{P1}	ΔT_{P2}
41	1.17	2.69	-0.01	2.53	0.09
81	1.49	-2.92	0.03	-2.65	-0.59
103	2.80	6.21	0.01	-4.79	1.10

Tableau 4

d.d.p. (V)	σ (°C)	ΔT_{max}	ΔT_{min}	ΔT_{P1}	ΔT_{P2}
41	0.58	0.97	0.13	0.97	0.28
81	0.78	-1.06	-0.28	-0.47	-0.86
103	0.48	0.57	0.38	-0.48	0.44

Tableau 5

λ_3 (s ⁻¹)	σ (°C)	σ_{max}	σ_{min}	σ_{P1}	σ_{P2}
sans	2.08	4.62	0.39	3.19	1.03
infini	2.07	4.19	0.53	3.62	0.83
-1/3300	1.58	3.41	0.55	2.45	0.80
-1/147	0.94	1.50	0.56	1.42	0.63
-1/330	0.76	1.23	0.44	0.52	0.65

notant **H1'** et **H1''** le partitionnement de **H1**, si comme préconisé en (30) **L2 = 1** :

$$Y = [H1' + H2L1'^{-1} \quad H1'']X1. \quad (32)$$

6.2. Résultats expérimentaux

Le nombre de modes adjoints devant être inférieur ou égal au nombre d'entrée ($n_2 \leq p$), nous ne pouvons adjoindre qu'un seul mode : le flux de chaleur appliqué à la plaque constitue l'unique entrée.

6.2.1. Correction des régimes statiques. Les résultats correspondants apparaissent dans le Tableau 4 où l'on retrouve les mêmes grandeurs que dans le Tableau 3. La comparaison de ces deux tableaux fait ressortir une très nette amélioration.

6.2.2. Tests en régimes dynamiques. Pour tester les diverses possibilités étudiées au paragraphe 5.1.2, nous avons successivement retenu pour la troisième valeur propre (en s⁻¹) :

- λ_3 infini
- $\lambda_3 = -1/3300$ (négligeable par rapport aux 2 modes dominants)
- $\lambda_3 = \lambda_1 = -1/330$
- $\lambda_3 = \lambda_2 = -1/147$.

Les résultats, sous forme d'écart-types, sont consignés dans le Tableau 5. Pour permettre la comparaison, nous avons également fait figurer, sur la première ligne, les valeurs correspondant au modèle sans mode correcteur.

Parallèlement, nous présentons sur les Figs. 5-8 les thermogrammes expérimentaux des points P1 et P2 confrontés à ceux issus du modèle avec adjonction du mode correcteur correspondant.

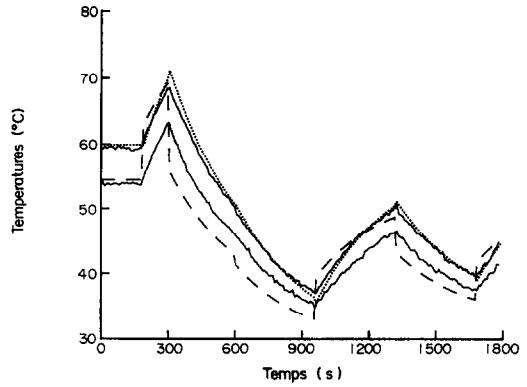


FIG. 5. Points P1 et P2 : thermogrammes expérimentaux et théoriques avec λ_3 infini.

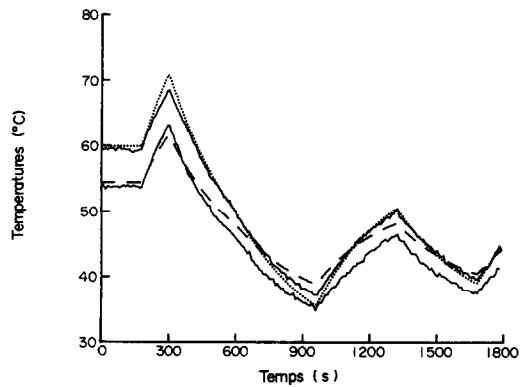


FIG. 6. Points P1 et P2 : thermogrammes expérimentaux et théoriques avec λ_3 quasi-nul.

Sur l'ensemble de ces résultats, il apparaît nettement que :

- (a) l'adjonction d'un mode est efficace pour retrouver le régime stationnaire initial (Fig. 5 à 8),
- (b) la correction λ_3 infini induit, comme prévu, des discontinuités aux instants correspondant aux variations de type échelon de la commande (Fig. 5),
- (c) la correction λ_3 quasi-nul élimine les discontinuités mais traduit incorrectement la succession rapide des différents échelons d'entrée (Fig. 6),
- (d) la correction $\lambda_3 = \lambda_2$ accroît sensiblement la contribution énergétique [9] de la seconde constante de temps relativement à celle de la première, d'où la dynamique trop marquée des thermogrammes théoriques (Fig. 7),
- (e) la correction $\lambda_3 = \lambda_1$ est la plus satisfaisante (Fig. 8) et permet en outre de ne pas augmenter la dimension du modèle (cf. section 6.1.2(c)). L'équation d'état (22) est conservée, l'équation d'observation, exprimée pour les seuls points P1 et P2, devient :

$$Y = \begin{bmatrix} 13.48 & -1.658 \\ 38.12 & 1.811 \end{bmatrix} X. \quad (33)$$

L'équation d'état (dim. 2) et l'équation (33), formulée pour les 50 points, constitue la représentation

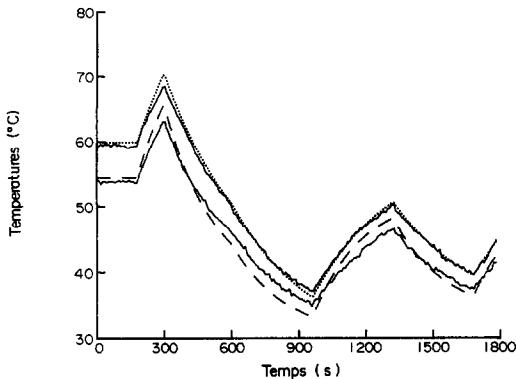


FIG. 7. Points P1 et P2: thermogrammes expérimentaux et théoriques avec $\lambda_3 = \lambda_2$.

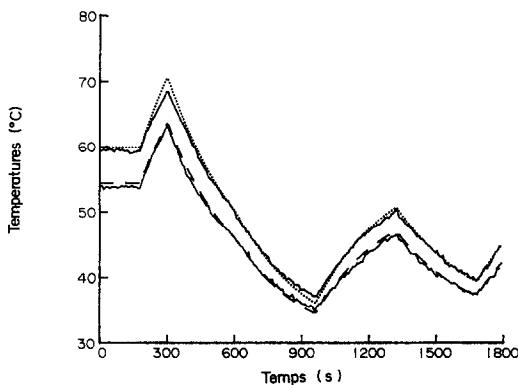


FIG. 8. Points P1 et P2: thermogrammes expérimentaux et théoriques avec $\lambda_3 = \lambda_1$.

d'état affinée, dans la base modale, qui conduit aux meilleurs résultats.

7. CONCLUSION

La représentation d'état dans la base modale constitue une forme canonique particulièrement intéressante et qui, de plus, se prête bien à l'identification. Nous avons montré comment une expérimentation de type relaxation, associée à des essais en régime statique, pouvait permettre cette identification. Nous avons également proposé une méthode d'affinement du modèle identifié par adjonction de modes correcteurs des résultats correspondant aux régimes stationnaires.

La démarche décrite a été appliquée à un système thermique à paramètres répartis, observé par thermographie IR; il en a résulté un modèle très simple et pourtant capable de décrire avec une bonne précision l'évolution d'un champ de température. Remarquons ici qu'un modèle de connaissance aurait conduit à des résultats probablement moins satisfaisants, en raison par exemple de la grande complexité de la modélisation des "effets de bords": l'identification permet d'éviter la description fine de tous les phénomènes thermo-physiques, notamment au niveau des conditions limites toujours mal connues. Le modèle de

connaissance, obtenu par exemple par une méthode de type différences finies, aurait d'autre part présenté un ordre beaucoup plus élevé (correspondant à la discrétisation spatiale mise en oeuvre); l'obtention d'un modèle d'ordre réduit, notamment de type modal, est toutefois envisageable en mettant en oeuvre des techniques de réduction, par exemple la méthode d'agrégation [9, 10].

La méthode est fondée sur la possibilité d'expérimentations simples relativement à celles requises, par exemple, par l'analyse harmonique. Cependant, de telles expérimentations sont quelquefois impossibles suivant le système étudié et l'approche proposée n'est alors plus applicable; on peut dans ce cas envisager l'étude dynamique lors d'une excitation a priori quelconque (mais spectralement riche) et l'identification directe des différents paramètres de la représentation modale, par un algorithme d'optimisation non linéaire. La difficulté est alors le grand nombre d'inconnues quand l'observation porte sur un champ de température.

L'étude présentée nous a conduit à mettre au point un code de calcul adapté à l'identification directe de "modèle réduit" de systèmes linéaires complexes. L'association de cet outil numérique à un outil expérimental puissant, la thermographie IR, devrait être particulièrement intéressante pour des applications de type contrôle-commande d'un champ de température; un avantage important d'un modèle linéaire de faible dimension réside en effet dans la possibilité de son exploitation immédiate par les automaticiens.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Eykoff, *System Identification—Parameter and State Estimation*. Wiley, New York (1979).
2. A. Barraud, Réalisation minimale et approximation optimale des systèmes dynamiques linéaires invariants, Th. d'état, Univ. Nantes (1975).
3. E. Boileau, C. Benard et B. Guerrier, Comparaison de différentes approximations des fonctions de transfert d'une paroi thermique, *Revue Gen. Thermique* No. 257, 391-404 (mai 1983).
4. J. H. Balbi, N. Balbi, P. Orega et G. Simonot, Modélisation du champ de capteurs de la centrale de Vignola, *Rev. Phys. Applic.* T.21, 169-180 (février 1986).
5. P. Bacot, A. Neveu et J. Sicard, Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le bâtiment, *Revue Gen. Thermique* No. 267, 189-201 (1984).
6. J. Sicard, P. Bacot et A. Neveu, Analyse modale des échanges thermiques dans le bâtiment, *Int. J. Heat Mass Transfer* **28**, 111-123 (1985).
7. F. Papini *et al.*, Modélisation de systèmes à conditions de flux variables: validation par thermographie infrarouge, *C. r. Journées SFT, Paris* (20 novembre 1985).
8. P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Ed. Masson, Paris (1982).
9. G. P. Michaleco, Approximation des systèmes complexes par des modèles de dimension réduite, Th. d'état, Univ. Paris-Sud (1979).
10. M. Decoster and A. R. Van Cauwenbergh, A comparative study of different reduction methods, Part 1 et 2, *Automatica* **17**(2), 68-74, 125-134 (1976).
11. R. N. McDonough and W. H. Huggins, Best least squares representation of signals by exponentials, *IEEE Trans. Automatic Control* **Ac-13**(4), 408-412 (1968).

ANNEXE

En notant :

- K_{ij} les termes de la matrice \mathbf{K}
- Z_j l'exponentielle de la j ème valeur propre
- \tilde{Y}_i la i ème composante du vecteur \tilde{Y}
- r le nombre de mesures par thermogramme
- k le numéro de la mesure (indice temporel)

à l'équation matricielle (8) correspond un ensemble de $r * q$ égalités de la forme :

$$Y_i(k) = \sum_{j=1}^n K_{ij} Z_j^{(k)} + \tilde{Y}_i \tag{A1}$$

En notant $\Delta Y_i(k)$ l'écart entre la mesure effectuée, au point i et à l'instant k , et la valeur correspondante pour le modèle, on introduit le critère quadratique C :

$$C = \sum_{i=1}^q C_i \text{ avec } C_i = \sum_{k=1}^r \Delta^2 Y_i(k) \tag{A2}$$

On se propose d'estimer le paramètre n en incrémentant la dimension m de Z jusqu'à ce que :

$$C(m) \simeq C(m+1) \text{ (alors } n = m) \tag{A3}$$

avec

$$[Z, \mathbf{K}, \tilde{Y}](m) = \arg(\min C(m)) \tag{A4}$$

Les équations (A3) et (A4) signifient que pour chaque valeur de m il faudra résoudre un problème d'optimisation (non convexe) dont $[Z, \mathbf{K}, \tilde{Y}]$ sont solutions. On doit a priori remarquer que :

- (a) connaissant Z de dimension m , chaque composante \tilde{Y}_i du vecteur \tilde{Y} et chaque ligne K_i de la matrice \mathbf{K} peut être indépendamment déterminée par la minimisation du critère C_i ;
- (b) le domaine de résolution est, dans l'espace de dimension m , cubique : $0 < Z_i < 1$ car la fonction exponentielle est positive et que les valeurs propres sont réelles négatives ;
- (c) si en (A1), $t'(k) = t(k)/\beta$ et $Z_j' = Z_j^\beta$, alors :

$$Z_j^{t'(k)} = Z_j^{t(k)} \tag{A5}$$

Pour chaque valeur de m , nous avons mis en oeuvre une méthode de descente opérant alternativement dans le sous-espace des Z_j , exponentielles aux valeurs propres, puis dans ceux des lignes de la matrice \mathbf{K} et des composantes de \tilde{Y} ; mais, d'après (a), tout se passe comme si la fonctionnelle à minimiser n'était fonction que du vecteur Z . S'agissant alors de programmation quadratique la solution vérifie le système d'équations linéaires :

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} \begin{bmatrix} \tilde{Y}_i \\ K_i^T \end{bmatrix} = \mathbf{W}^T \begin{bmatrix} Y_i(1) \\ \vdots \\ Y_i(r) \end{bmatrix} \tag{A6}$$

avec

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & Z_1^{(1)} & \dots & Z_m^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & Z_1^{(r)} & \dots & Z_m^{(r)} \end{bmatrix} \tag{A7}$$

Soit $\hat{Z}(m-1)$ la solution recherchée pour une dimension $m-1$ de Z ; on procède d'abord, "partant" de $\hat{Z}(m-1)$, par minimisation unidirectionnelle suivant la composante que l'on veut adjoindre en annulant (méthode des dichotomies successives) $\partial C(m)/\partial Z_m$. Soit $\hat{Z}(m)$ le point ainsi obtenu ; "partant" de $\hat{Z}(m)$ on recherche $\hat{Z}(m)$ en appliquant un

algorithme classique de PNL, la méthode des gradients conjugués [8], qui, comme beaucoup de méthodes non heuristiques, nécessite la connaissance du gradient du critère C ; la d ème composante de ce vecteur est calculable, sans l'approximation consistant à négliger la dépendance de K et \tilde{Y} avec Z , d'après les relations :

$$\partial C/\partial Z_d = \sum_{i=1}^q \partial C_i/\partial Z_d \tag{A8}$$

$$\partial C_i/\partial Z_d = \sum_{k=1}^r 2\Delta Y_i(k) \partial Y_i(k)/\partial Z_d \tag{A9}$$

$$\partial Y_i(k)/\partial Z_d = \partial \tilde{Y}_i/\partial Z_d + \sum_{l=1}^m \partial K_{il}/\partial Z_d Z_l^{(k)} + K_{id} Z_d^{(k)-1} t(k) \tag{A10}$$

$$\partial \begin{bmatrix} \tilde{Y}_i \\ K_i^T \end{bmatrix} / \partial Z_d = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \left(\partial \mathbf{W}^T / \partial Z_d \begin{bmatrix} Y_i(1) \\ \vdots \\ Y_i(r) \end{bmatrix} - \partial (\mathbf{W}^T \mathbf{W}) / \partial Z_d \begin{bmatrix} \tilde{Y}_i \\ K_i^T \end{bmatrix} \right) \tag{A11}$$

(A10) et la relation matricielle (A11) ont respectivement été obtenues par dérivation de (A1) et (A6). La prise en compte de la contrainte (c) peut s'effectuer par simple projection sur le domaine des points successivement engendrés par l'algorithme de minimisation. La propriété (d) permet d'éviter de manipuler des exposants élevés et de "séparer" les composantes de Z .

Signalons ici que d'autres approches, mettant en oeuvre les techniques du calcul opérationnel, sont également possibles [11].

Dans l'exemple traité ci-dessous est mis en évidence la précision de la détermination des constantes de temps, en regard des imprécisions de "mesure". Comme mesures on a considéré 8 fonctions bruitées (de manière aléatoire gaussienne) simulant des décroissances de température, 100 à 150°C jusqu'à quelques dizaines de degrés ; ces fonctions sont des combinaisons linéaires de 5 exponentielles de constantes de temps (en secondes) [20, 80, 200, 240, 300]. Pour l'un de ces thermogrammes, on a par exemple :

$$T(t) = 70 - 10e^{-t/20} + 15e^{-t/80} + 30e^{-t/200} - 25e^{-t/240} + 35e^{-t/300}$$

(1) Bruit nul :

Les écarts-types obtenus (en °C), on fonction de m , sont :

$$\sigma(m=1) = 1.38, \quad \sigma(2) = 0.385, \quad \sigma(3) = 0.052, \quad \sigma(4) = 0.0085, \quad \sigma(5) = 0.75 \cdot 10^{-5}$$

Pour le thermogramme précédent on a trouvé ($m=5$) :

$$T(t) = 70.00 - 10.00e^{-t/20.000} + 15.00e^{-t/80.000} + 30.11e^{-t/200.07} - 25.16e^{-t/239.97} + 35.05e^{-t/299.96}$$

(2) Bruit caractérisé par un écart-type de 0.5°C et une valeur moyenne nulle :

Pour $m=3$ on parvient au "bruit de mesure" ; on a les résultats :

$$\sigma(m=1) = 1.49, \quad \sigma(2) = 0.641, \quad \sigma(3) = 0.512 \simeq 0.5$$

$$T(t) = 70.12 - 9.81e^{-t/17.218} + 15.78e^{-t/79.050} + 38.46e^{-t/264.00}$$

On constate que les deux petites constantes de temps ont été conservées et que les trois plus grandes ont été regroupées ; l'identification a ainsi conduit à une "réduction" [9, 10].

MODAL ANALYSIS OF A THERMAL DIFFUSION PROCESS: IDENTIFICATION BY INFRARED THERMOGRAPHY

Abstract—The interest of the state representation, on the eigenvectors basis, for distributed linear thermal systems is pointed out. An identification procedure for such a representation is proposed, using (i) the system response analysis during the transition from a thermal excited state to a stationary state and (ii) the results of different stationary experiments. The theoretical approach is applied to a thermal diffusion process, the surface temperature field being measured by infra-red thermography. The identified model, very low dimensioned, gives accurate results for the evolution of this temperature field during a transient experiment.

ANALYSE EINES WÄRMELEITVORGANGS MIT HILFE DER INFRAROT-THERMOGRAFIE

Zusammenfassung—Auf die Darstellung des Zustandes von verteilten linearen thermischen Systemen mit Hilfe von Eigenvektoren wird hingewiesen. Eine Methode zur Bestimmung dieser Darstellung wird vorgeschlagen, welche die Systemantwort beim Übergang von einem angeregten in einen stationären Zustand sowie die Ergebnisse verschiedener Versuche unter stationären Bedingungen verwendet. Der theoretische Ansatz wird auf einen Wärmeleitvorgang angewendet, bei dem die Oberflächentemperaturen mit Hilfe einer Infrarotkamera bestimmt werden. Das stark verkleinerte Modell erlaubt die genaue Bestimmung des Temperaturfeldes während eines instationären Versuchs.

МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ТЕПЛОЙ ДИФФУЗИИ: ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕТОДОМ ИНФРАКРАСНОЙ ТЕРМОГРАФИИ

Аннотация—Отмечена наметившаяся тенденция к представлению состояний распределенных тепловых систем с помощью собственных векторов. Предложена методика идентификации такого представления, основанная, во-первых, на анализе чувствительности системы при переходе от теплового возбужденного к стационарному состоянию и, во-вторых, на использовании результатов различных стационарных экспериментов. Этот теоретический метод использован при рассмотрении процесса тепловой диффузии, причем температурное поле поверхности измерялось методом инфракрасной термографии. Проверяемая модель дает точное описание распределения температур в неустановившемся режиме.